Gamma 函数简介

1 Gamma 函数的定义

对每个 $\alpha > 0$, 广义积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

都是收敛的. 将其值记作 $\Gamma(\alpha)$, 称作 Gamma 函数. 即

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \qquad (\alpha > 0).$$

利用下一部分中介绍的 Gamma 函数的性质, 可以在很多场合简化积分运算, 如指数分布、正态分布的相关计算, 等等.

2 Gamma 函数的性质

Gamma 函数 $\Gamma(\alpha)$ 可以对任意 $\alpha > 0$ 定义. 在应用中我们最常用的是 α 为正整数 $1, 2, 3, \cdots$ 或"半数" $0.5, 1.5, 2.5, \cdots$ 时的结论. 首先计算一下 $\Gamma(1)$ 和 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. 容易看出

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

用一下换元积分公式, 可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \xlongequal{t=x^2} \int_0^{+\infty} x^{-1} e^{-x^2} \cdot 2x dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

最后一项用"常规的方法"处理: 先利用对称性将定积分转化成二重积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy}\ ;$$

然后进行极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

可得

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4}.$$

带入上面的式子, 便得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. (以上“常规的方法”可详见《高等数学》课本下册第 77 页例 9.2.8.)

下面我们用分部积分公式推导一下 $\Gamma(\alpha+1)$ 与 $\Gamma(\alpha)$ 之间的递推关系式. 由分部积分公式, 容易看出

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = -\int_0^{+\infty} t^\alpha d(e^{-t}) \\ &= -t^\alpha e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot \alpha t^{\alpha-1} dt = \alpha\cdot\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

由该递推公式, 我们可以很容易得到对任何正整数 n,

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot\Gamma(n-1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = (n-1)!$$

$$\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

下面总结一下 Gamma 函数的性质:

(1) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

(2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha) \quad (\alpha > 0)$;

(3) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\quad \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$ (n 为正整数).

3 Gamma 函数的应用

我们通过几个例子看看 Gamma 函数在指数分布和正态分布计算中的应用.

例 1. 设 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 求 $E(X^k)$ (k 为正整数).

解:

$$\begin{aligned}E(X^k) &= \int_0^{+\infty} x^k\cdot\lambda e^{-\lambda x} dx \overset{x=\frac{t}{\lambda}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{\lambda^k}\cdot\lambda e^{-t}\cdot\frac{1}{\lambda} dt \\ &= \frac{1}{\lambda^k}\cdot\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^k}\cdot\Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}.\end{aligned}$$

例 2. 设 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 求 $E(X^{2k})$ (k 为正整数).

解:

$$
\begin{aligned}
E(X^{2k}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&\xlongequal{x=\sqrt{2t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} 2^k t^k e^{-t} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \cdot \int_{0}^{+\infty} t^{k-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \cdot \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \cdot \left(k-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(k-\frac{3}{2}\right) \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \cdots \cdot 1 = (2k-1)!!
\end{aligned}
$$